11.4 – 11.7
Μέτρηση κύκλου

ΘΕΩΡΙΑ

- Μήκος τόξου μ^o : $\ell = \dfrac{\pi R \mu}{180}$
- Μήκος τόξου α rad : $\ell = \alpha R$
- Σχέση μοιρών – ακτινίων : $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{\mu}{180}$
- Εμβαδόν κυκλικού δίσκου : $E = \pi R^2$
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ^o : $\left(O\widehat{AB}\right) = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360}$
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα α rad : $\left(O\widehat{AB}\right) = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$
- Εμβαδόν κυκλικού τμήματος = Εμβαδόν κυκλικού τομέα – Εμβαδόν τριγώνου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

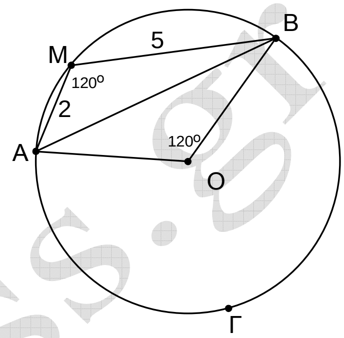
Δίνεται κύκλος (Ο, R) και χορδή του $AB = \lambda_3$. Αν Μ είναι σημείο του μικρότερου τόξου $\overset{\frown}{AB}$ έτσι ώστε $AM = 2$ και $MB = 5$, να υπολογίσετε

i) την ακτίνα του κύκλου

ii) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που ορίζουν οι χορδές ΑΜ και ΜΒ, τα οποία περιέχονται στην κυρτή γωνία $A\hat{O}B$.

Προτεινόμενη λύση

i)



$AB = \lambda_3 = R\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{AMB} = 120^o,$

$\overset{\frown}{A\Gamma B} = 240^o$

$A\hat{M}B = 120^o$

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΜΑΒ έχουμε $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MAMB\text{συν}120^o =$

$= 4 + 25 + 20\cdot\frac{1}{2} = 39,$ άρα $AB = \sqrt{39}$

$AB = R\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{39} = R\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad R = \sqrt{13}$

ii)

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδό του κυκλικού τομέα (Ο, $\overset{\frown}{AMB}$) αφαιρέσουμε το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΑΜΒ και ΑΟΒ.

Προφανώς η γωνία $A\hat{O}B = 120^o$ οπότε το εμβαδό του τομέα (Ο, $\overset{\frown}{AMB}$) είναι

$$E_{(O,\ \overset{\frown}{AMB})} = \frac{\pi R^2 \mu^o}{360^o} = \frac{\pi\cdot 13\cdot 120^o}{360^o} = \frac{13\pi}{3} \quad \text{και}$$

$$E_{\text{τριγ AMB}} + E_{\text{τριγ AOB}} = \frac{1}{2}MA\cdot MB\eta\mu 120^o + \frac{1}{2}R\cdot R\eta\mu 120^o$$

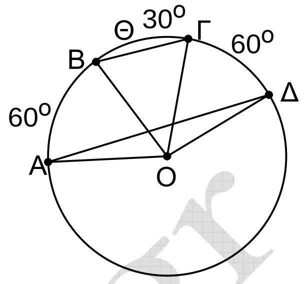
$$= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 13\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{23\sqrt{3}}{4}$$

Άρα $\quad E_{\text{ζητούμενο}} = \frac{13\pi}{3} - \frac{23\sqrt{3}}{4}$ τετραγωνικές μονάδες

2.

Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{AB} = 60^0$, $B\Gamma = \lambda_{12}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 60^0$. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τραπεζίου ΑΒΓΔ. (ΒΓ, ΑΔ χορδές και $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ τόξα)

Προτεινόμενη λύση



$B\Gamma = \lambda_{12} \;\Rightarrow\; B\hat{O}\Gamma = 30^o$ και $A\hat{O}\Delta = 150^o$

Από τον νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα ΒΟΓ και ΑΟΔ εύκολα βρίσκουμε ότι

$B\Gamma = R\sqrt{2-2\sqrt{3}}$ και $A\Delta = R\sqrt{2+2\sqrt{3}}$

Το μήκος του κάθε τόξου των $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι

$$\ell = \frac{\pi R \mu^o}{180^o} = \frac{\pi R 60^o}{180^o} = \frac{\pi R}{3}$$

Περίμετρος μικτογράμμου τραπεζίου: $P = \frac{\pi R}{3} + R\sqrt{2-2\sqrt{3}} + \frac{\pi R}{3} + R\sqrt{2+2\sqrt{3}}$

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το κυκλικό τμήμα ΑΒΘΓΔΑ αφαιρέσουμε το κυκλικό τμήμα ΒΘΓΒ

Εμβαδόν του κ.τομέα $(O, \overset{\frown}{AB\Theta\Gamma\Delta})$: $E_{(O,\, \overset{\frown}{AB\Theta\Gamma\Delta})} = \frac{\pi R^2 150^o}{360^o} = \frac{5\pi R^2}{12}$

Εμβαδόν τριγώνου ΑΟΔ : $E_{\tau\rho.\,AO\Delta} = \frac{1}{2} R \cdot R\ \eta\mu 150^o = \frac{1}{4}R^2$

Άρα $E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\ \tau\mu\eta\mu\ AB\Theta\Gamma\Delta A} = \frac{5\pi R^2}{12} - \frac{1}{4}R^2$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα $(O, \overset{\frown}{B\Theta\Gamma})$: $E_{(O,\, \overset{\frown}{B\Theta\Gamma})} = \frac{\pi R^2 30^o}{360^o} = \frac{\pi R^2}{12}$

Εμβαδόν τριγώνου ΒΟΓ : $E_{\tau\rho.OB\Gamma} = \frac{1}{2} R \cdot R\ \eta\mu 30^o = \frac{1}{4}R^2$

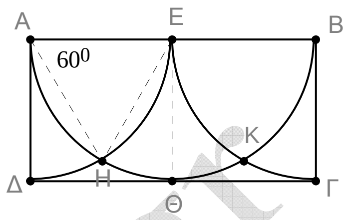
Άρα $E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\ \tau\mu\eta\ B\Theta\Gamma} = \frac{\pi R^2}{12} - \frac{1}{4}R^2$

Συνεπώς $E_{\zeta\eta\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\nu o} = \frac{5\pi R^2}{12} - \frac{1}{4}R^2 - \frac{\pi R^2}{12} + \frac{1}{4}R^2 = \frac{\pi R^2}{3}$

3.

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ρ, ΒΓ= ρ και Ε το μέσο της ΑΒ.
Στο εσωτερικό του ορθογωνίου, με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε ημικύκλιο και τα τεταρτοκύκλια (Α , ρ) και (Β , ρ) που τέμνουν το ημικύκλιο στα Η, Κ.
Να βρείτε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΕΗΚ.

Προτεινόμενη λύση



Προφανώς ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ εφάπτεται του ΔΓ στο μέσο του έστω Θ.
Φέρνουμε την ΕΘ, που είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος.
Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι διπλάσιο του εμβαδού του μικτογράμμου τριγώνου

$$\overset{\frown}{EH}\overset{\frown}{H\Theta}\Theta E = E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}(E, \overset{\frown}{H\Theta}) - E_{\kappa.\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}(\text{χορδής } EH)$$

$$= E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}(E, \overset{\frown}{H\Theta}) - \Big(E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}(A, \overset{\frown}{HE}) - E_{\tau\rho.\ AHE}\Big)$$

$$= E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}(E, \overset{\frown}{H\Theta}) - E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}(A, \overset{\frown}{HE}) + E_{\tau\rho.\ AHE}$$

$$= \frac{\pi\rho^2 30^o}{360^o} - \frac{\pi\rho^2 60^o}{360^o} + \frac{1}{2}\rho^2 \eta\mu 60^o$$

$$= \frac{\pi\rho^2}{12} - \frac{\pi\rho^2}{6} + \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\rho^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi\rho^2}{12}$$

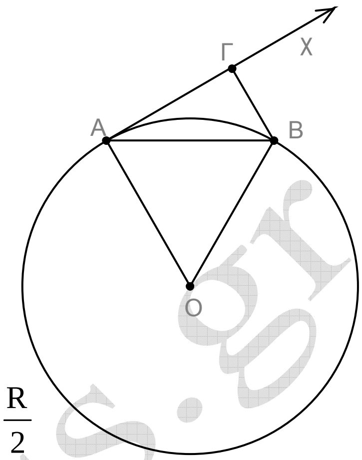
Άρα $E_{\zeta\eta\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\nu o} = \dfrac{\rho^2\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi\rho^2}{6}$

∗ ΑΕ = ΕΗ = ΗΑ = ρ ⇒ τρίγωνο ΑΕΗ ισόπλευρο

4.

Δίνεται κύκλος (O, R) και χορδή του AB = R. Στο A φέρνουμε την εφαπτομένη Ax του κύκλου και από το B την BΓ κάθετη στην Ax. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου $\overset{\frown}{AB}\Gamma$ συναρτήσει του R.

Προτεινόμενη λύση



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ μείον το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ABA.

Τρίγωνο OAB ισόπλευρο $\Rightarrow$ $B\hat{A}\Gamma = 30^o$

Στο τρίγωνο ABΓ : $\quad συν30^o = \dfrac{A\Gamma}{AB}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{A\Gamma}{R}$$

$$A\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad B\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$$

$$\text{οπότε} \quad (AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot B\Gamma = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$$

$$E_{\text{κυκλ. τμημ } ABA} = E_{(O,\ \overset{\frown}{AB})} - E_{\text{τριγ } AOB} = \frac{\pi R^2 60^o}{360^o} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

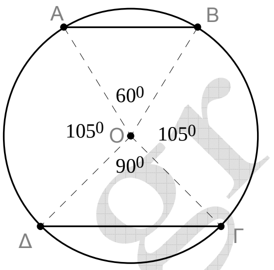
$$E_{\text{ζητούμενο}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi R^2}{6}$$

5.

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές $AB = \lambda_6$ και $\Delta\Gamma = \lambda_4$.
Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τραπεζίου, που έχει πλευρές τις χορδές ΑΒ, ΔΓ και τα τόξα που περιέχονται μεταξύ των χορδών αυτών .

Προτεινόμενη λύση

1η περίπτωση : Οι χορδές ΑΒ, ΔΓ είναι εκατέρωθεν του κέντρου



$AB = \lambda_6 = R$ και $\Delta\Gamma = \lambda_4 = R\sqrt{2}$ $\Rightarrow$

$\overset{\frown}{AB} = 60^o$ και $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 90^o$

$AB // \Gamma\Delta \Rightarrow \overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma} \Rightarrow$

$$\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \frac{360^o - 150^o}{2} = 105^o$$

$$\ell_{\overset{\frown}{A\Delta}} = \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi R \mu}{180} = \frac{\pi R 105}{180} = \frac{7\pi R}{12}$$

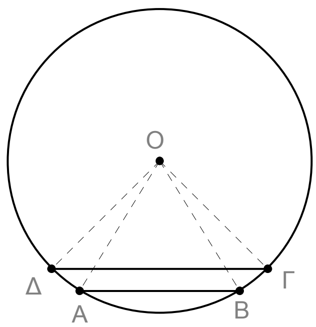
Περίμετρος του τραπεζίου : $P = AB + \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} + \Delta\Gamma + \ell_{\overset{\frown}{A\Delta}} = R + R\sqrt{2} + \frac{7\pi R}{6}$

Εμβαδόν του τραπεζίου : $E = E_{(O,\, \overset{\frown}{\Delta A})} + E_{\text{τριγ } AOB} + E_{(O,\, \overset{\frown}{B\Gamma})} + E_{\text{τριγ } \Delta O\Gamma}$

$$= \frac{\pi R^2 105}{360} + \frac{1}{2} R^2 \eta\mu 60^o + \frac{\pi R^2 105}{360} + \frac{1}{2} R^2$$

$$= \frac{7\pi R^2}{12} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} R^2$$

2η περίπτωση : Οι χορδές είναι προς το ίδιο μέρος του κέντρου



Τώρα είναι $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \frac{90^o - 60^o}{2} = 15^o$

$$\ell_{\overset{\frown}{A\Delta}} = \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi R \mu}{180} = \frac{\pi R 15}{180} = \frac{\pi R}{12}$$

Περίμετρος του τραπεζίου : $P = AB + \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} + \Delta\Gamma + \ell_{\overset{\frown}{A\Delta}}$

$$= R + R\sqrt{2} + \frac{\pi R}{6}$$

Εμβαδόν του τραπεζίου : $E = E_{\text{κ.τμήματος } \Gamma\Delta} - E_{\text{κ.τμήματος } AB}$

$$= E_{\text{κ.τομέα } (O,\, \overset{\frown}{\Delta\Gamma})} - (O\Delta\Gamma) - E_{\text{κ.τομέα } (O,\, \overset{\frown}{AB})} + (OAB)$$

$$= \frac{\pi R^2 90}{360} - \frac{1}{2} \lambda_4 \cdot \alpha_4 - \frac{\pi R^2 60}{360} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

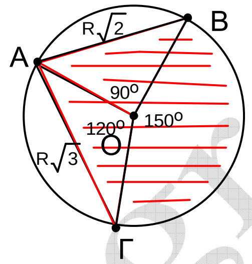
$$= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\pi R^2}{12} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

6.

Δίνεται κύκλος (Ο, R) με μήκος 12π και δύο χορδές του $AB = \lambda_4$ και $A\Gamma = \lambda_3$ εκατέρωθεν του κέντρου Ο. Να βρείτε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου που έχει πλευρές τις AB, ΑΓ και το τόξο ΒΓ.

Προτεινόμενη λύση



$L = 12\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi R = 12\pi \quad \Leftrightarrow \quad R = 6$

Τότε $AB = \lambda_4 = R\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

και $A\Gamma = \lambda_3 = R\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Ακόμα είναι $\overset{\frown}{AB} = 90^o$, $\overset{\frown}{A\Gamma} = 120^o$

άρα $\overset{\frown}{B\Gamma} = 150^o$ και $\ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \dfrac{\pi R 150}{180} = 5\pi$

Περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ : $P = AB + \ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} + A\Gamma$

$= 6\sqrt{2} + 5\pi + 6\sqrt{3}$

και εμβαδόν του : $E = E_{\text{τριγ } AOB} + E_{(O,\ \overset{\frown}{B\Gamma})} + E_{\text{τριγ } AO\Gamma}$

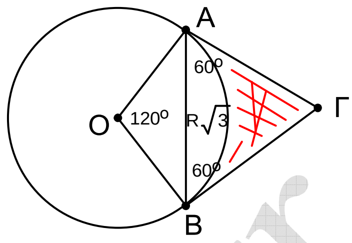
$= \dfrac{1}{2}R^2 + \dfrac{\pi R^2 150}{360} + \dfrac{1}{2}R^2\,\etaμ120^o$

$= 18 + 15\pi + 9\sqrt{3}$

7.

Δίνεται κύκλος (O, R) και χορδή του AB = λ_3. Αν οι εφαπτομένες του κύκλου στα A και B τέμνονται στο Γ, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του R.

Προτεινόμενη λύση



Αφού $AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}$, θα είναι $\overset{\frown}{AB} = 120^o$, άρα στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΓΑ = ΓΒ) κάθε μία από τις ίσες γωνίες του $\hat{A}$ και $\hat{B}$ θα είναι 60^o, συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά $\alpha = R\sqrt{3}$.

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi\, R120}{180} = \frac{2\pi\, R}{3}$$

Περίμετρος P του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ : $P = \ell_{\overset{\frown}{AB}} + A\Gamma + B\Gamma$

$$= \frac{2\pi R}{3} + 2R\sqrt{3}$$

Και το εμβαδόν του : $E = E_{\text{τριγ ΑΒΓ}} - E_{\text{κυκλ. τμημ ΑΒΑ}}$

$$= \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \left(E_{\text{κ.τομέα ΟΑΒ}} - (OAB)\right)$$

$$= \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2 120}{360} + \frac{1}{2} R\, R\, \eta\mu 120^o$$

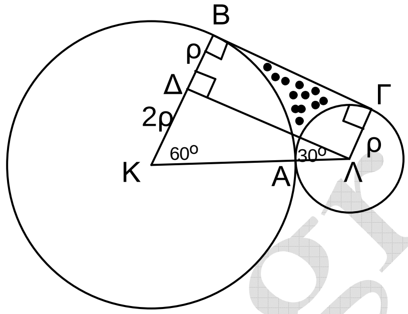
$$= \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi\, R^2}{3} + \frac{1}{2}R^2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= R^2\sqrt{3} - \frac{\pi\, R^2}{3}$$

8.

Δύο κύκλοι (Κ, 3ρ) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι ένα κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των κύκλων, να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του ρ.

Προτεινόμενη λύση



Φέρω το τμήμα $\Lambda\Delta \perp KB$.

Τότε το ΔΒΓΛ είναι ορθογώνιο με ΔΒ= ΛΓ = ρ

Άρα $K\Delta = KB - \Delta B = 3\rho - \rho = 2\rho$.

Είναι $K\Lambda = 3\rho + \rho = 4\rho$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΛ είναι

$K\Delta = 2\rho = \dfrac{K\Lambda}{2}$, άρα $\Delta\widehat{\Lambda}K = 30^o$.

Οπότε $\widehat{K} = 60^O$ και $K\widehat{\Lambda}\Gamma = 120^o$.

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΚΔΛ :

$$\Delta\Lambda^2 = K\Lambda^2 - K\Delta^2 = 16\rho^2 - 4\rho^2 = 12\rho^2$$ άρα $\Delta\Lambda = 2\rho\sqrt{3} = B\Gamma$

$$\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot 3\rho \cdot 60^o}{180^0} = \pi\rho, \qquad \ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi\rho \cdot 120^o}{180^0} = \frac{2\pi\rho}{3}$$

Περίμετρος Ρ του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ :

$$P = \ell_{\overset{\frown}{AB}} + \ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} + B\Gamma = \pi\rho + \frac{2\pi\,\rho}{3} + 2\rho\sqrt{3} = \frac{5\pi\,\rho}{3} + 2\rho\sqrt{3}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου προκύπτει αν από το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΒΓΛ αφαιρέσουμε τους κυκλικούς τομείς $(K, \overset{\frown}{AB})$ και $(\Lambda, \overset{\frown}{A\Gamma})$ όμως

$$E_{\text{τραπεζίου}} = \frac{(KB + \Lambda\Gamma)B\Gamma}{2} = 4\rho^2\sqrt{3}$$

$$E_{(K,\, \overset{\frown}{AB})} = \frac{\pi(3\rho)^2 60}{360} = \frac{3\pi\rho^2}{2}$$

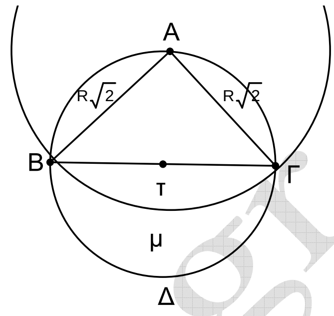
$$E_{(\Lambda,\, \overset{\frown}{A\Gamma})} = \frac{\pi\rho^2 120}{360} = \frac{\pi\rho^2}{3}$$

$$E_{\text{ζητούμενο}} = 4\rho^2\sqrt{3} - \frac{3\pi\rho^2}{2} - \frac{\pi\rho^2}{3} = 4\rho^2\sqrt{3} - \frac{11\pi\rho^2}{6}$$

9.

Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Με κέντρο την κορυφή της ορθής γωνίας Α γράφουμε το τόξο ΒΓ του κύκλου (Α, ΑΒ). Δείξτε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Προτεινόμενη λύση



Είναι προφανές ότι $AB = A\Gamma = R\sqrt{2}$.

Το εμβαδόν του μηνίσκου μ είναι

$$E = E_{\text{ημικυκλ ΒΔΓ}} - E_{\text{κυκλ. τμημ τ}} =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} - \left(E_{\text{κ. τμήματος ΒΓ}} - E_{\text{τριγ, ΑΒΓ}}\right)$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi (R\sqrt{2})^2 90}{360} + E_{\text{τριγ ΑΒΓ}}$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} + E_{\text{τριγ ΑΒΓ}} = E_{\text{τριγ ΑΒΓ}}$$

10.

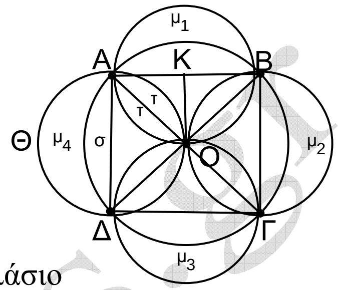
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου γράφουμε κύκλους.

i) Να βρεθεί συναρτήσει του R το εμβαδόν του καμπυλογράμμου σταυρού που σχηματίζεται μέσα στο τετράγωνο

ii) Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων μηνίσκων, που είναι έξω από το τετράγωνο, είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου.

Προτεινόμενη λύση

i)



Η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με $\lambda_4 = R\sqrt{2}$

Οι κύκλοι με διαμέτρους τις πλευρές του τετραγώνου έχουν ακτίνα $\rho = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Ο σταυρός στο εσωτερικό του τετραγώνου αποτελείται από τέσσερα φύλλα, που το κάθε ένα έχει εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του κυκλικού τμήματος τ.

Το εμβαδό του κυκλικού τμήματος τ είναι $E_{\tau} = E_{\text{κ. τομέα ΚΑΟ}} - E_{\text{τριγ ΑΚΟ}}$

$$= \frac{\pi \rho^2 90}{360} - \frac{1}{2}\rho^2$$

$$= \frac{\pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 90}{360} - \frac{1}{2}\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi R^2}{8} - \frac{R^2}{4}$$

Άρα το εμβαδόν του σταυρού είναι $E_{\text{σταυρού}} = 8\left(\frac{\pi R^2}{8} - \frac{R^2}{4}\right) = \pi R^2 - 2R^2.$

ii)

Είναι φανερό ότι $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$.

Το εμβαδόν κάθε μηνίσκου είναι $E = E_{\text{ημικυκλ ΑΘΔ}} - E_{\text{κυκλ. τμημ . σ}}$

$$= \frac{\pi \rho^2}{2} - (E_{(O,\ \overset{\frown}{A\Delta})} - E_{\text{τριγ ΑΟΔ}})$$

$$= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{4} + E_{\text{τριγ ΑΟΔ}}$$

$$= E_{\text{τριγ ΑΟΔ}} \quad \text{οπότε}$$

Οπότε $4E = 4E_{\text{τριγ ΑΟΔ}} = E_{\text{ΑΒΓΔ}}$.

11.

i) Ο τροχός ενός ποδηλάτου έχει διάμετρο 56cm. Αν ο τροχός περιστρεφόμενος έκανε 5500 στροφές, να βρείτε πόσο διάστημα διέτρεξε το ποδήλατο.

ii) Όταν ένα ποδήλατο διανύει μία απόσταση S, ο ένας τροχός που έχει ακτίνα R κάνει ν στροφές, ενώ ο τροχός που έχει ακτίνα ρ κάνει μ στροφές. Δείξτε ότι $\frac{\mu}{\nu} = \frac{R}{\rho}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Το μήκος του κύκλου του τροχού είναι $L = 56\pi$

Είναι φανερό ότι σε κάθε στροφή του τροχού ο τροχός διανύει απόσταση ίση με το μήκος του κύκλου του τροχού δηλαδή απόσταση ίση με 56π, επομένως ο τροχός διάνυσε διάστημα $S = 5500 \cdot 56\pi = 308000\pi$ cm = 3,08 Km.

ii)

Αφού το ποδήλατο διάνυσε απόσταση S και ο τροχός ακτίνας R έκανε ν στροφές, τότε $S = 2\pi R\nu$

Επίσης για τον τροχό ακτίνας ρ ισχύει $S = 2\pi\rho\mu$

Άρα $2\pi R\nu = 2\pi\rho\mu \Leftrightarrow R\nu = \rho\mu \Leftrightarrow \frac{\mu}{\nu} = \frac{R}{\rho}$

12.

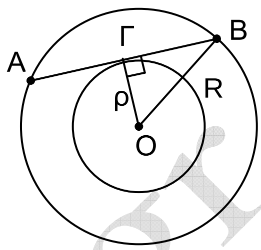
Έστω δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και (O, ρ) με $R > \rho$. Δείξτε ότι

i) Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου είναι $E = \pi(R+\rho)(R-\rho)$

ii) Το παραπάνω εμβαδόν ισούται με το εμβαδόν ενός κύκλου ο οποίος έχει διάμετρο μία χορδή του μεγαλύτερου κύκλου η οποία εφάπτεται του μικρότερου.

Προτεινόμενη λύση

i)



Το εμβαδόν E του κυκλικού δακτυλίου είναι ίσο με

$E = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi(R^2 - \rho^2) = \pi(R+\rho)(R-\rho)$

ii)

Έστω AB μία χορδή του μεγαλύτερου κύκλου, η οποία εφάπτεται στον μικρότερο κύκλο στο σημείο Γ.

Τότε το εμβαδόν E' του κύκλου με διάμετρο την AB είναι

$$E' = \pi\frac{AB^2}{4}$$

Όμως $\frac{AB}{2} = \Gamma B$ και, από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΒΓ είναι

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB^2}{4} = R^2 - \rho^2$$

Συνεπώς το εμβαδόν E του δακτυλίου γίνεται $E = \pi\frac{AB^2}{4} = E'$

13 .

Δίνεται ημικύκλιο (O, R) και διάμετρος αυτού AB. Στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Γ ώστε ΒΓ = 2R. Από το Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο A τέμνει την προέκταση του ΓΕ στο Δ. Δείξτε ότι

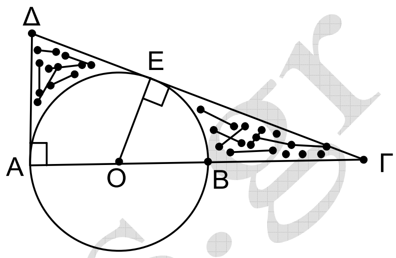
i) $\Gamma E = 2R\sqrt{2}$

ii) $\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma\Delta \cdot \Gamma E$

iii) Να υπολογίσετε το ΓΔ συναρτήσει του R

iv) Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτογράμμων τριγώνων ΒΓΔ και ΑΔΕ συναρτήσει του R.

Προτεινόμενη λύση



i)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΓ έχουμε

$E\Gamma^2 = O\Gamma^2 - OE^2 = (3R)^2 - R^2 = 8R^2$

Άρα $E\Gamma = \sqrt{8R^2} = 2R\sqrt{2}$

ii)

Τα τρίγωνα ΑΔΓ, ΟΕΓ είναι όμοια διότι $\hat{A} = 90^o = \hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ = κοινή.

Άρα $\dfrac{\Gamma A}{E\Gamma} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma O} \Leftrightarrow \Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma\Delta \cdot \Gamma E$

iii)

$\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma\Delta \cdot \Gamma E \Leftrightarrow 4R \cdot 3R = \Gamma\Delta \cdot 2R\sqrt{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 3R\sqrt{2}$

iv)

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου ΑΕΒΑ.

Είναι $\Delta A = \Delta E = \Delta\Gamma - E\Gamma = 3R\sqrt{2} - 2R\sqrt{2} = R\sqrt{2}$

Οπότε $(A\Delta\Gamma) = \dfrac{1}{2} A\Gamma \cdot A\Delta = \dfrac{1}{2} 4R \cdot R\sqrt{2} = 2R^2\sqrt{2}$

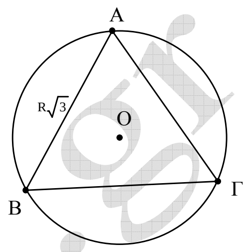
Επίσης $E_{\text{ημικυκλ}} = \dfrac{\pi R^2}{2}$, συνεπώς $E_{\text{ζητούμενο}} = 2R^2\sqrt{2} - \dfrac{\pi R^2}{2}$.

14.

Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευρά ΑΒ = 15
Να υπολογίσετε

i) Την ακτίνα R του κύκλου .
ii) Το εμβαδόν του κύκλου (O,R)
iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
iv) Το εμβαδόν του χωρίου που είναι μέσα στον κύκλο και έξω από το τρίγωνο .

Προτεινόμενη λύση



i)

$AB = 15 \quad \Leftrightarrow \quad R\sqrt{3} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad R = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

ii)

$E = \pi R^2 = 75\pi$

iii)

$(AB\Gamma) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{225\sqrt{3}}{4}$

iv)

$E = E_{\text{κύκλου}} - E_{AB\Gamma} = 75\pi - \dfrac{225\sqrt{3}}{4}$

15.

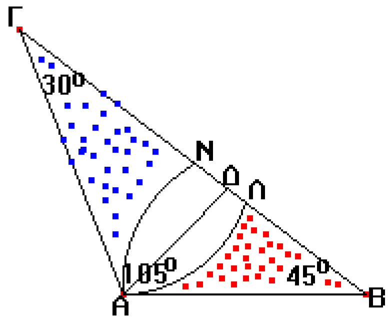
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 105^o$, $\widehat{B} = 45^o$ και ύψος ΑΔ = 10.
Με κέντρα τις κορυφές Β, Γ και ακτίνες ΒΑ, ΓΑ αντίστοιχα γράφουμε τόξα $\overset{\frown}{AN}$, $\overset{\frown}{A\Lambda}$ μέσα στο τρίγωνο. Να βρεθούν

i) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ .

ii) Τα εμβαδά των μικτογράμμων τριγώνων ΑΒΛ, ΑΝΛ, ΑΝΓ.

Προτεινόμενη λύση

i)



Αφού $\widehat{A} = 105^o$, $\widehat{B} = 45^o$, θα είναι $\widehat{\Gamma} = 30^o$

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχει $\widehat{B} = 45^o$,
άρα είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΑΔ = 10.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, αφού $\widehat{\Gamma} = 30^o$

θα είναι $A\Delta = \dfrac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = 20$

Οπότε
$$\begin{aligned}\Delta\Gamma^2 &= A\Gamma^2 - A\Delta^2\\ &= 400 - 100\\ &= 300 \quad \text{επομένως} \quad \Delta\Gamma = 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

Τότε $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 10 + 10\sqrt{3}$

Οπότε $(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = 50 + 50\sqrt{3}$

ii)

Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΛ (περιοχή με τα κόκκινα σημεία) προκύπτει αν από το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΔ αφαιρέσουμε την περιοχή ΑΔΛΑ .
Όμως η περιοχή ΑΔΛΑ προκύπτει αν από τον τομέα $(\Gamma, \overset{\frown}{A\Lambda})$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΑΔ .

Είναι $E_{(\Gamma,\, \overset{\frown}{A\Lambda})} = \dfrac{\pi A\Gamma^2 30^o}{360^o} = \dfrac{\pi \cdot 20^2 \cdot 30^o}{360^o} = \dfrac{100\pi}{3}$

$(\Gamma A\Delta) = \dfrac{1}{2}\Gamma\Delta \cdot A\Delta = 50\sqrt{3}$

$(AB\Delta) = \dfrac{1}{2}B\Delta \cdot A\Delta = 50$

Συνεπώς $(AB\Lambda) = 50 - \left(\dfrac{100\pi}{3} - 50\sqrt{3}\right) = 50 - \dfrac{100\pi}{3} + 50\sqrt{3}$

Η περιοχή ΑΝΔΑ έχει εμβαδόν $(AN\Delta A) = E_{(B,\, \overset{\frown}{BN})} - E$ τριγ ΑΒΔ

$$= \frac{\pi BN^2 45^o}{360^o} - 50$$

και επειδή εύκολα διαπιστώνουμε ότι $BN = 10\sqrt{2}$,
τελικά $(AN\Delta A) = 25\pi - 50$

Επομένως το μικτόγραμμο τρίγωνο ΑΝΔΛΑ (λευκή περιοχή) έχει εμβαδόν

(ΑΝΔΛΑ) = (ΑΔΛΑ) + (ΑΝΔΑ)

$$= \frac{100\pi}{3} - 50\sqrt{3} + 25\pi - 50$$

$$= \frac{175\pi}{3} - 50 - 50\sqrt{3}$$

Τέλος, το μικτόγραμμο τρίγωνο ΓΑΝ (περιοχή με τα μπλε σημεία) έχει εμβαδόν

(ΓΑΝ) = (ΑΒΓ) $- E_{(B,\ \overset{\frown}{BN})}$ = 50 + $50\sqrt{3} - 25\pi$